26/12/21

Συμπληρώσεις στο χθεσινό μάθημα: Ο τύπος ορισμού της εκθετικής συνάρτησης φανταστικού ορίσματος: $e^{iy} := \cos y + i\sin y$, $y\in\mathbb{R}$ ονομάζεται τύπος του Euler. Μέσω αυτού ορίζεται δηλ. μια συνάρτηση $E: \underbrace{i\mathbb{R}}_{:=\{iy\in\mathbb{C}:\, y\in\mathbb{R}\}} \to \mathbb{C}$, $E(iy) := e^{iy}$, $y\in\mathbb{R}$ και αυτό επιτρέπει εντός του εκθέτη (δηλ. για την ανεξάρτητη μεταβλητή της E) να εκτελούνται υπολογισμοί στο $\mathbb{C}$.

- Ορίσαμε $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$ $[x,y\in\mathbb{R}]$: τη συνάρτηση $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $\exp z := e^z := e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\Rightarrow |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x\cdot e^{iy}| = |e^x|\cdot|e^{iy}| = e^x > 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow \exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$

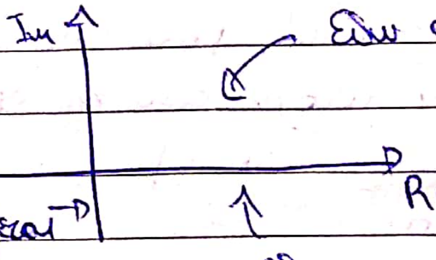
Επίσης $e^{x+i0} = e^x$, $\boxed{e^{z+w} = e^z\cdot e^w}$, $\boxed{e^{-z} = \frac{1}{e^z} = (e^z)^{-1}}$,

$\boxed{e^{nz} = (e^z)^n \ \forall n\in\mathbb{Z}}$, $\boxed{e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}}$, $\boxed{\overline{e^z} = \overline{e^x e^{iy}} = e^x\,\overline{e^{iy}} = e^x\cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar z}}$ και

$\rightarrow$ και (SOS) $\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z}$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\forall z\in\mathbb{C}$

$\left[\, e^{z+2k\pi i} = e^z\cdot e^{2k\pi i} = e^z\big(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}\big) \,\right]$

Άρα ορίσαμε την εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ με χρήση της εκθ. συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ (γνωστή) και των τριγωνομ. συναρτ. $\cos, \sin: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (γνωστές) και εξαγάγαμε κάποιες βασικές ιδιότητές της.

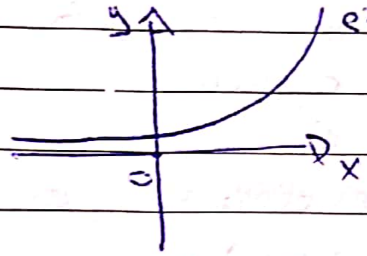


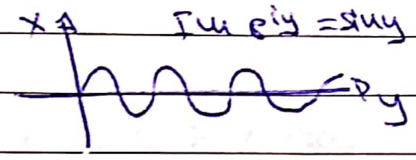
Εδώ ορίζεται η $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

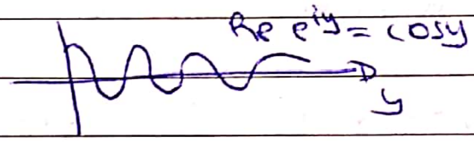
Εδώ ορίζεται η e^{iy}, $y\in\mathbb{R}$, ως $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Εδώ ορίζεται η e^x, $x\in\mathbb{R}$ (γνωστή)

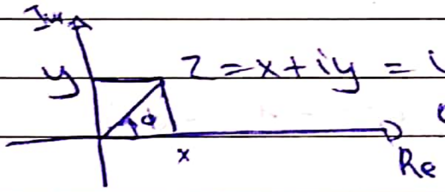
$e^{iy} = \cos y + i\sin y$ [$\Rightarrow e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ και $|e^{iy}| = 1$ $\forall y \in \mathbb{R}$, δηλ. ο περιορισμός της e^z στον άξονα των φανταστικών είναι μια φραγμένη, 2π-περιοδική συνάρτηση, ενώ ο περιορισμός στον άξονα των πραγμ. τίποτα από αυτά]







Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

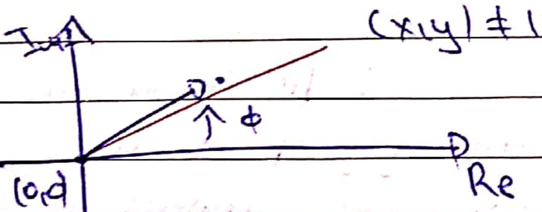


$z = x + iy = (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$ αντιστ. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ $= r\cos\varphi + i r\sin\varphi$

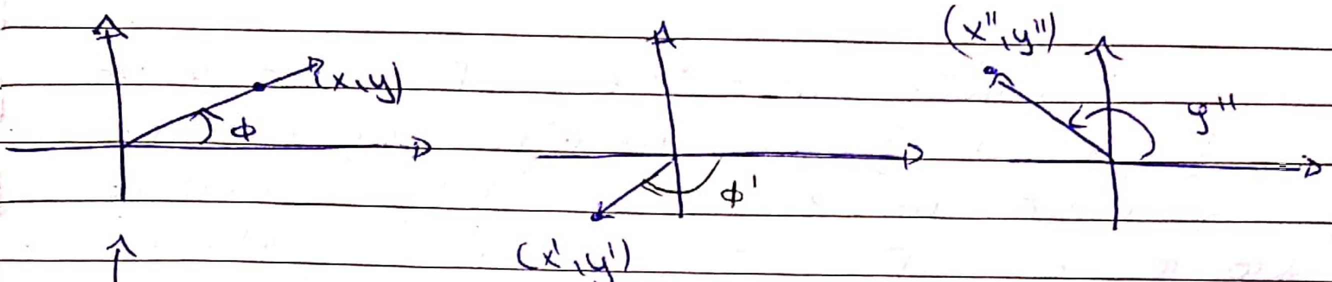
όπου: $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ $= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}$

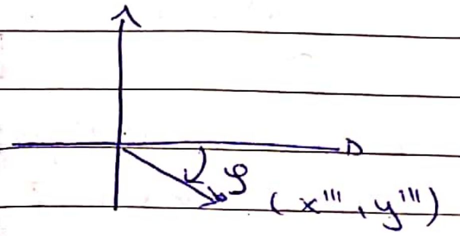
και $\varphi \in \mathbb{R}$: (αρχή) η γωνία του θετικού ημιάξονα των πραγματικών και του (τέλος) ημιάξονα $(0,0)$ που ορίζεται από την κατεύθυνση του διανύσματος (x,y)

$(x,y) \neq (0,0)$ * κατά τον μαθηματικά θετικό προσανατολισμό



Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ ορίζεται μοναδικά μια κύρια (*) γωνία $y \in (-\pi, \pi]$ η οποία ξεκινάει (αρχή) από τον θετικό ημιάξονα των πραγματικών και τελειώνει στον ημιάξονα της κατευθ. του διανύσματος $(x,y) \neq (0,0)$





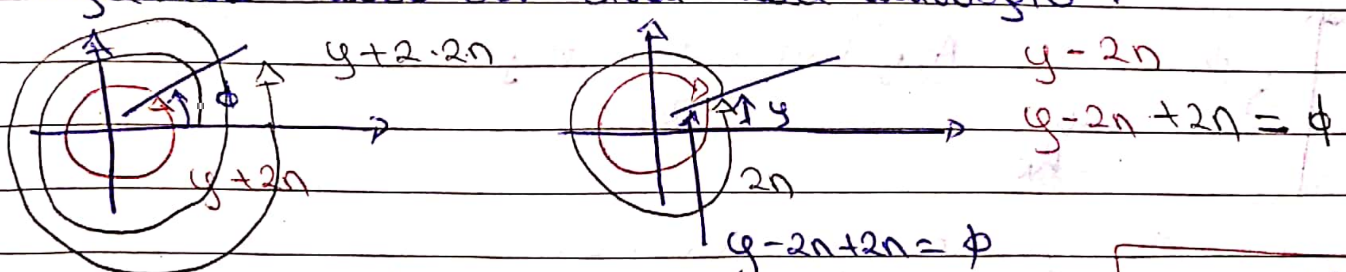
(*) βλ. τύπο (1.23) Σημ.

Τη μοναδική αυτή κυρτή γωνία (με αρχή και τέλος, δηλ. προσανατολισμό, όπως περιγράψαμε) $\varphi \in (-\pi, \pi]$ η οποία αντιστοιχεί στο $z = x+iy \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ την ονομάζουμε κύριο όρισμα του z και τη συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$. Άρα $\operatorname{Arg}: \mathbb{C}^* \to (-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ [με $\operatorname{Arg}(\mathbb{C}^*) = (-\pi,\pi]$] και:

$$\boxed{z = |z|\, e^{i \operatorname{Arg} z}, \ \forall z \in \mathbb{C}^*}$$

Επειδή $z = |z| e^{i\operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} e^{i2k\pi} = |z| e^{i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ το σύνολο των γωνιών $\{\underbrace{\operatorname{Arg} z}_{\text{μοναδική γωνία } \forall z \in \mathbb{C}^*} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ συμβολίζεται με $\arg z$ και ονομάζεται όρισμα του z [και είναι ως σύνολο μοναδικό $\forall z \in \mathbb{C}^*$, και μπορεί να θεωρηθεί και ως πλειονότιμη συνάρτηση με άπειρα αριθμήσιμους κλάδους: $z \longmapsto \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} =: \arg z$]

Πρακτικά αυτό δεν είναι κάτι καινούργιο:



Συμπεραίνουμε: $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\exists!\ \operatorname{Arg} z \in (-\pi,\pi]$: $\boxed{z = |z| e^{i\operatorname{Arg} z}}$

τριγωνομετρική ή πολική μορφή μιγαδικού

Παρατηρήσεις: Για κάθε σημείο $z\in\mathbb{C}$ του μοναδιαίου κύκλου:
$S^1 := \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ υπάρχει μοναδικό κύριο όρισμα:
$\mathrm{Arg}\,z = \varphi \in (-\pi,\pi]$ με $z=|z|\,e^{i\varphi}=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$
αφού για $\varphi,\psi\in(-\pi,\pi]$: $e^{i\varphi}=e^{i\psi} \underset{\cdot e^{-i\psi}}{\Leftrightarrow} \underbrace{e^{i(\varphi-\psi)}}_{\shortparallel}=1$

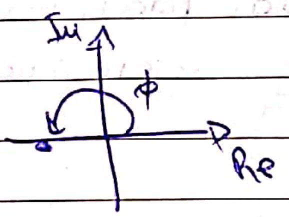
$$= \cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)$$

$\Leftrightarrow \cos(\varphi-\psi)=1 \wedge \sin(\varphi-\psi)=0 \underset{\varphi,\psi\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \varphi-\psi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

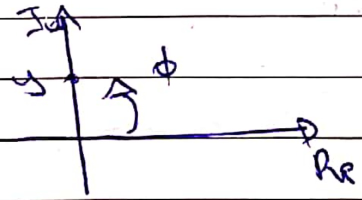
$\underset{\varphi,\psi\in(-\pi,\pi]}{\Leftrightarrow} \varphi-\psi=0 \Leftrightarrow \varphi=\psi$
$\Rightarrow \varphi-\psi\in(-2\pi,2\pi)$

Άρα έχουμε: $e^{i\theta}=1,\ \theta\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$e^{i\theta}=1,\ \theta\in(-\pi,\pi] \Leftrightarrow \theta=0$ δηλ. το όρισμα του
$1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ είναι το $\underbrace{\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}}_{=\arg 1}$

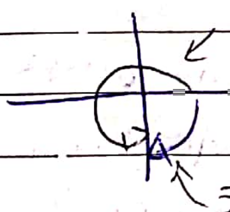
$[1=|1|\cdot e^{i0}=e^{i0}]$ και το κύριο όρισμα του $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
είναι το $0\ (=\mathrm{Arg}\,1)$



$\mathrm{Arg}\,x=\pi \quad \forall x<0$



$\mathrm{Arg}(iy)=\frac{\pi}{2} \quad \forall y>0$

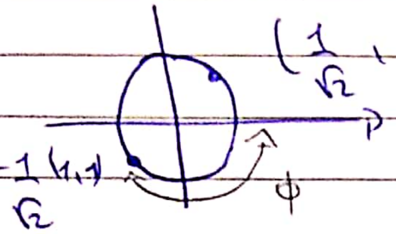


λάθος για κύριο όρισμα!

$\mathrm{Arg}(iy)=-\frac{\pi}{2} \quad \forall y<0$

σωστό

Άλλο παράδειγμα: $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$



$Arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

$Arg\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\pi}{4} \; \left[= \frac{\pi}{4} - \pi\right]$

Ξανά: $\forall z \in \mathbb{C}^*: z = |z|e^{iArgz} = |z|e^{i\underbrace{(Argz+2k\pi)}_{=\arg z}} = |z|e^{i\arg z}$

με $|z|>0$, $Argz \in (-\pi,\pi]$ μοναδικά] και $z = re^{i\theta}$ με $r>0$ και $\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r=|z|$ και $\theta = \arg z$

$z = re^{i\theta}$ με $r>0$ και $\theta \in (-\pi,\pi] \Leftrightarrow r=|z|$ και $\theta = Argz$

Η όλη φασαρία πιο πάνω γίνεται για να καταλάβουμε ότι και μεν οι αριθμοί $\theta_0 \in \mathbb{R}$ και $\theta_0 + 2k_0\pi \in \mathbb{R}$ για κάποιο $k_0 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ είναι διαφορετικά αλλά και οι δύο δίνουν τον ίδιο μιγαδικό αριθμό $e^{i\theta_0} = e^{i(\theta_0+2k_0\pi)}$ δηλ.:

$e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ με $\varphi,\psi \in \mathbb{R} \not\Rightarrow \varphi = \psi$ [αλλά $\Rightarrow \varphi = \psi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$]

[ενώ: $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ με $\varphi,\psi \in (-\pi,\pi] \Rightarrow \varphi = \psi$]

Σημασία του ορίσματος στον πολλαπλασιασμό

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z_1 = |z_1|e^{i\arg z_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\arg z_2}$

[και ακόμα $z_1 = |z_1|e^{iArgz_1}$, $z_2 = |z_2|e^{iArgz_2}$]

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{iArgz_1}|z_2|e^{iArgz_2} = |z_1|\cdot|z_2|e^{iArgz_1}e^{iArgz_2}$

$= |z_1|\cdot|z_2|\, e^{i\overbrace{(\underbrace{Argz_1}_{\in(-\pi,\pi]} + \underbrace{Argz_2}_{\in(-\pi,\pi]})}^{}}$ όπου:

$\in (-2\pi, 2\pi]$ ΠΡΟΣΟΧΗ

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|\,\underbrace{|e^{i(Argz_1+Argz_2)}|}_{=1} \Longrightarrow e^{i(Argz_1+Argz_2)} = e^{iArg(z_1z_2)}$ ΑΛΛΑ ΟΧΙ $Argz_1 + Argz_2 = Arg(z_1z_2)$

Π.χ. $z_1 = -26$, $z_2 = i \cdot 27 \Rightarrow Arg(-26) = \pi$

$Arg(i27) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Arg(-26) + Arg(i27) = \frac{3\pi}{2} \notin (-\pi, \pi]$ και

$z_1 \cdot z_2 = -(26 \cdot 27) i \Rightarrow Arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2}$

Όμως: $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2)$

$z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i\arg(z_1 z_2)}$ αλλά και $z_1 z_2 = |z_1| e^{i\arg z_1} \cdot |z_2| e^{i\arg z_2} =$

$= |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} \xRightarrow{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|} e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} = e^{i\arg(z_1 z_2)}$

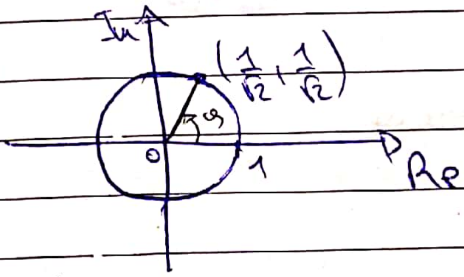
$\Rightarrow \underbrace{\arg z_1}_{=\{Arg z_1 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}} + \underbrace{\arg z_2}_{=\{Arg z_2 + 2l\pi \,:\, l \in \mathbb{Z}\}} = \{Arg z_1 + Arg z_2 + 2k\pi + 2l\pi : k, l \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{\underbrace{Arg z_1 + Arg z_2}_{=3\pi/2} + 2m\pi : m \in \mathbb{Z}\} = \{\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{Arg(z_1 z_2)} + 2\overbrace{(m-1)}^{m'}\pi : m \in \mathbb{Z}\} = \arg(z_1 z_2)$

Στο προηγούμενο παράδειγμα

παραδείγματα μετατροπής από αλγεβρική σε πολική μορφή

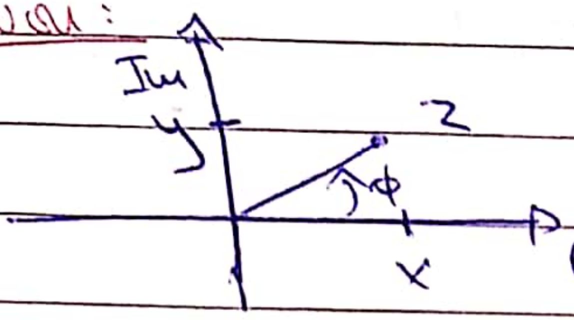
$1+i = \underbrace{|1+i|}_{=\sqrt{2}} e^{iArg(1+i)} \Leftrightarrow \underbrace{e^{i\underbrace{Arg(1+i)}_{\in(-\pi,\pi]}}}_{\in S^1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \overset{αυτό}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$\Rightarrow Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Α15 | $z \in \mathbb{C}^*$, $\lambda > 0$: $\mathrm{Arg}(\lambda z) = \mathrm{Arg}\, z$

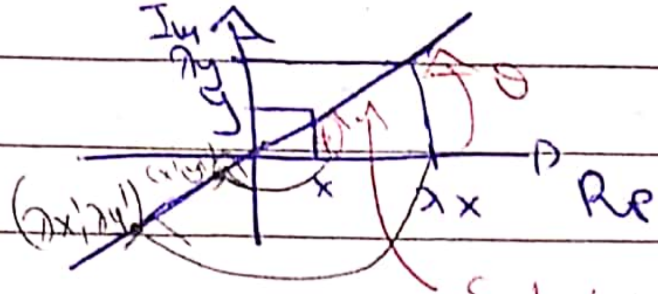
Λύση:



$\lambda z = \lambda(x+iy) = \lambda x + i\lambda y = \lambda(x,y)$

$\in \{t(x,y) : t>0\}$

$\neq (0,0)$



$\{t(x,y) : t>0\}$

$\varphi = \mathrm{Arg}\, z$

$\theta = \mathrm{Arg}(\lambda z)$, $\lambda > 0$

και από γεωμετρία και ορισμό του κύριου ορίσματος

$\varphi = \theta$ $\left[\arctan \dfrac{y}{x} = \arctan\left(\dfrac{\lambda y}{\lambda x}\right)\right]$